6 класс

6.1. Замените в примере на сложение десятичных дробей каждую звездочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство:

$$0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1.$$

6.2. Ученики 6 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 1 шарику, а каждый мальчик — по 2 шарика. Могло ли так оказаться, что, когда они пришли на праздник, у них всего осталось 100 шариков?

6.3. Маша ездит на велосипеде вдвое быстрее своего младшего брата Васи, а на самокате вдвое медленнее, чем он на велосипеде. Маша и Вася, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через две минуты Маша пересела на самокат. Через какое время Вася догонит Машу?

6.4. Участок 40×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 6 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

6.5. Иван-Царевич спросил на развилке дорог у трех зверей: Зайца, Лисы и Медведя путь в Кощеево царство (он знает, что путь ровно один). Первый зверь ответил: «Налево». Второй сказал: «Первый зверь указал неверный путь», и добавил «Направо». Третий — «Первый зверь указал неверный путь», «Второй зверь оба раза солгал», «Прямо». Подскажите Ивану-Царевичу верную дорогу и определите, в каком порядке отвечали звери, если известно, что Лиса всегда лжет, Медведь всегда говорит правду, а трусливый Заяц чередует правильные ответы с неправильными, начиная либо с правды, либо со лжи. (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 6 класса в 16-00.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

6 класс

6.1. Замените в примере на сложение десятичных дробей каждую звездочку цифрой 2 или цифрой 3 так, чтобы получилось верное равенство:

$$0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} + 0{,}{*}{*} = 1.$$

6.2. Ученики 6 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 5 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 4 шарика. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 1 шарику, а каждый мальчик — по 2 шарика. Могло ли так оказаться, что, когда они пришли на праздник, у них всего осталось 100 шариков?

6.3. Маша ездит на велосипеде вдвое быстрее своего младшего брата Васи, а на самокате вдвое медленнее, чем он на велосипеде. Маша и Вася, стартовав вместе, поехали на велосипедах, и через две минуты Маша пересела на самокат. Через какое время Вася догонит Машу?

6.4. Участок 40×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 6 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

6.5. Иван-Царевич спросил на развилке дорог у трех зверей: Зайца, Лисы и Медведя путь в Кощеево царство (он знает, что путь ровно один). Первый зверь ответил: «Налево». Второй сказал: «Первый зверь указал неверный путь», и добавил «Направо». Третий — «Первый зверь указал неверный путь», «Второй зверь оба раза солгал», «Прямо». Подскажите Ивану-Царевичу верную дорогу и определите, в каком порядке отвечали звери, если известно, что Лиса всегда лжет, Медведь всегда говорит правду, а трусливый Заяц чередует правильные ответы с неправильными, начиная либо с правды, либо со лжи. (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 6 класса в 16-00.

7 класс

7.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

7.2. Одноклассники во время контрольной посылали друг другу записки. После контрольной семеро сказали: «Я отправил на одну записку больше, чем получил»; каждый из остальных сказал: «Я отправил на две записки меньше, чем получил». Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

7.3. Вася, Петя и Миша ходили на рыбалку. На обратном пути они встретили друзей, которые спросили их про улов. Каждый из ребят произнес по два предложения. Вася сказал: «Я поймал больше всех», «Петя и Миша вместе поймали 7 рыб». Петя: «Нет, я поймал больше всех», «Все вместе мы поймали 10 рыб». Миша: «Мы с Петей выловили поровну», «Вася поймал меньше 4 рыб». Известно, что тот, чей улов больше, чем у остальных, говорил правду, а остальные двое по разу солгали и по разу сказали правду. Кто из ребят выловил больше всех рыб? (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

7.4. Участок 80×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 5 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

7.5. Для четырех различных натуральных чисел a, b, c, d составлена «таблица сложения» размера 4×4 клетки. (Сбоку и сверху от таблицы поставлены числа a, b, c, d, а в клетки записаны 16 чисел — их суммы.) Какое наибольшее количество из 16 чисел, записанных в таблицу, могли оказаться простыми?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 7 класса в 16-20.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

7 класс

7.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

7.2. Одноклассники во время контрольной посылали друг другу записки. После контрольной семеро сказали: «Я отправил на одну записку больше, чем получил»; каждый из остальных сказал: «Я отправил на две записки меньше, чем получил». Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

7.3. Вася, Петя и Миша ходили на рыбалку. На обратном пути они встретили друзей, которые спросили их про улов. Каждый из ребят произнес по два предложения. Вася сказал: «Я поймал больше всех», «Петя и Миша вместе поймали 7 рыб». Петя: «Нет, я поймал больше всех», «Все вместе мы поймали 10 рыб». Миша: «Мы с Петей выловили поровну», «Вася поймал меньше 4 рыб». Известно, что тот, чей улов больше, чем у остальных, говорил правду, а остальные двое по разу солгали и по разу сказали правду. Кто из ребят выловил больше всех рыб? (Обязательно обоснуйте свой ответ.)

7.4. Участок 80×50 метров выделен под огороды и обнесен оградой снаружи. Как установить внутри участка 5 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?

7.5. Для четырех различных натуральных чисел a, b, c, d составлена «таблица сложения» размера 4×4 клетки. (Сбоку и сверху от таблицы поставлены числа a, b, c, d, а в клетки записаны 16 чисел — их суммы.) Какое наибольшее количество из 16 чисел, записанных в таблицу, могли оказаться простыми?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 7 класса в 16-20.

8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 999.

8.2. Девять последовательных натуральных чисел записали произвольным образом в клетки квадрата 3×3 и подсчитали произведения чисел в строках и произведения чисел в столбцах. Сумма шести полученных произведений нечетна. Докажите, что в таблице есть строка и столбец с нечетными суммами чисел.

8.3. Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник — по два урока, ..., в каждую пятницу — по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни — учебными. В сентябре 30 дней.)

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ — ромб. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

8.5. На доске написаны пять ненулевых чисел. К ним дописаны еще пять чисел, получаемых следующим образом: из квадрата каждого из исходных чисел вычитается сумма четырех остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех десяти чисел на доске?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 8 класса в 16-40.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

8 класс

8.1. Найдите какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 999.

8.2. Девять последовательных натуральных чисел записали произвольным образом в клетки квадрата 3×3 и подсчитали произведения чисел в строках и произведения чисел в столбцах. Сумма шести полученных произведений нечетна. Докажите, что в таблице есть строка и столбец с нечетными суммами чисел.

8.3. Прогульщик Вася в каждый понедельник сентября некоторого года пропускал по одному уроку, в каждый вторник — по два урока, ..., в каждую пятницу — по пять уроков. Могло ли оказаться так, что за весь сентябрь он пропустил ровно 64 урока? (Все субботы и воскресенья сентября были выходными, а остальные дни — учебными. В сентябре 30 дней.)

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Оказалось, что четырехугольник $FBDE$ — ромб. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

8.5. На доске написаны пять ненулевых чисел. К ним дописаны еще пять чисел, получаемых следующим образом: из квадрата каждого из исходных чисел вычитается сумма четырех остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех десяти чисел на доске?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 8 класса в 16-40.

9 класс

9.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 2010.

9.2. Верно ли, что любые два различных целых числа можно записать вместо чисел a и b в выражении $x^2 + ax + b$ так, чтобы полученный квадратный трехчлен имел хотя бы один корень?

9.3. На доске написаны ненулевые числа a, b, c, а также числа $a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло быть записано на доске?

9.4. В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна — 1 подарок, вторая — 2 подарка, третья — 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков.

На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый — 1 подарок, второй — 2 подарка, третий — 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

9.5. Точки M и N — середины сторон BC и CD четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что отрезки AM и AN делят диагональ BD на три равных отрезка. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

9 класс

9.1. Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 100, произведение которых делится на 2010.

9.2. Верно ли, что любые два различных целых числа можно записать вместо чисел a и b в выражении $x^2 + ax + b$ так, чтобы полученный квадратный трехчлен имел хотя бы один корень?

9.3. На доске написаны ненулевые числа a, b, c, а также числа $a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло быть записано на доске?

9.4. В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна — 1 подарок, вторая — 2 подарка, третья — 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков.

На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый — 1 подарок, второй — 2 подарка, третий — 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

9.5. Точки M и N — середины сторон BC и CD четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что отрезки AM и AN делят диагональ BD на три равных отрезка. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

10 класс

10.1. Найдите какие-нибудь три вектора с нулевой суммой таких, что при вычитании из суммы любых двух векторов третьего вектора получается вектор длины 1.

10.2. Три квадратных трехчлена получены из трехчлена $ax^2 + bx + c$: один — прибавлением единицы к коэффициенту a, другой — прибавлением единицы к коэффициенту b, третий — прибавлением единицы к коэффициенту c. Оказалось, что любые два из полученных трехчленов имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов исходного трехчлена — целое число.

10.3. Про n различных натуральных чисел известно, что из любых трех из них можно выбрать два так, что сумма этих двух чисел — простое число. При каком наибольшем n это возможно?

10.4. Биссектрисы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площади треугольника AIC и четырехугольника $MINB$ равны. Докажите, что длины сторон треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию.

10.5. На доске написаны 2010 ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ и произведения всех пар соседних чисел: $a_1 \cdot a_2$, $a_2 \cdot a_3$, $a_3 \cdot a_4$, $\ldots$, $a_{2009} \cdot a_{2010}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 4019 чисел?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 10 класса в 17-20.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

10 класс

10.1. Найдите какие-нибудь три вектора с нулевой суммой таких, что при вычитании из суммы любых двух векторов третьего вектора получается вектор длины 1.

10.2. Три квадратных трехчлена получены из трехчлена $ax^2 + bx + c$: один — прибавлением единицы к коэффициенту a, другой — прибавлением единицы к коэффициенту b, третий — прибавлением единицы к коэффициенту c. Оказалось, что любые два из полученных трехчленов имеют общий корень. Докажите, что сумма коэффициентов исходного трехчлена — целое число.

10.3. Про n различных натуральных чисел известно, что из любых трех из них можно выбрать два так, что сумма этих двух чисел — простое число. При каком наибольшем n это возможно?

10.4. Биссектрисы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площади треугольника AIC и четырехугольника $MINB$ равны. Докажите, что длины сторон треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию.

10.5. На доске написаны 2010 ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ и произведения всех пар соседних чисел: $a_1 \cdot a_2$, $a_2 \cdot a_3$, $a_3 \cdot a_4$, $\ldots$, $a_{2009} \cdot a_{2010}$. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди этих 4019 чисел?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 10 класса в 17-20.

11 класс

11.1. Сумма четырех векторов равна нулевому вектору, а при вычитании из суммы любых трех векторов четвертого вектора получается вектор длины 1. Какой может быть сумма длин этих четырех векторов?

11.2. В турнире по дзюдо участвовали 100 спортсменов. Схватки проводились по очереди. По правилам турнира, участник выбывает, как только он проигрывает две схватки. Каждые два спортсмена по правилам могут встретиться не более одного раза. Турнир заканчивается, когда невозможно больше провести ни одной схватки. Какое наибольшее количество участников могло остаться в турнире к моменту его завершения?

11.3. Числа a, b, c таковы, что при некоторых различных положительных x, y верны равенства $x^3 = ay^2 + by + c$, $y^3 = ax^2 + bx + c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть отрицательное.

11.4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ площади всех четырех боковых граней равны. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 так, что у пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ площади двух соседних боковых граней равны. Докажите, что и площади двух других боковых граней этой пирамиды также равны.

11.5. На доске вначале написаны два целых числа. Если на доске написаны числа a и b, то разрешается дописывать на доску число $a^3 - 2010b$. Может ли оказаться так, что на доске в некоторый момент появятся все целые числа от 2010 до 2020?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 11 класса в 17-40.

XXXVII Московская областная математическая олимпиада

11 класс

11.1. Сумма четырех векторов равна нулевому вектору, а при вычитании из суммы любых трех векторов четвертого вектора получается вектор длины 1. Какой может быть сумма длин этих четырех векторов?

11.2. В турнире по дзюдо участвовали 100 спортсменов. Схватки проводились по очереди. По правилам турнира, участник выбывает, как только он проигрывает две схватки. Каждые два спортсмена по правилам могут встретиться не более одного раза. Турнир заканчивается, когда невозможно больше провести ни одной схватки. Какое наибольшее количество участников могло остаться в турнире к моменту его завершения?

11.3. Числа a, b, c таковы, что при некоторых различных положительных x, y верны равенства $x^3 = ay^2 + by + c$, $y^3 = ax^2 + bx + c$. Докажите, что среди чисел a, b, c есть отрицательное.

11.4. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ площади всех четырех боковых граней равны. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 так, что у пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ площади двух соседних боковых граней равны. Докажите, что и площади двух других боковых граней этой пирамиды также равны.

11.5. На доске вначале написаны два целых числа. Если на доске написаны числа a и b, то разрешается дописывать на доску число $a^3 - 2010b$. Может ли оказаться так, что на доске в некоторый момент появятся все целые числа от 2010 до 2020?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 28 ноября, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 11 класса в 17-40.